10

FUNCIONES Y GRÁFICAS

CONTENIDOS

- Las funciones
- Representación gráfica de una función
  - Lectura de una gráfica
- Funciones crecientes y decrecientes
- Máximos y mínimos
- Funciones continuas y discontinuas
- Funciones lineales y afines

COMPETENCIAS BÁSICAS

- Asociar correctamente a problemas de la vida real la gráfica y la expresión algebraica correspondientes.
- Interpretar una gráfica para estudiar situaciones de la vida cotidiana.
- Distinguir si una gráfica es una función o no.
- Reconocer las variables dependiente e independiente al resolver un problema mediante una expresión algebraica.
- Representar gráficamente una función mediante la tabla de valores.
- Identificar en una gráfica sus características (intervalos de crecimiento, máximos y mínimos) y determinar si es continua o discontinua.
- Asociar a las gráficas lineales su expresión algebraica, y encontrar su pendiente y su ordenada en el origen cuando sea posible.
- Reconocer la pendiente de una recta.
- Distinguir si dos rectas son o no son paralelas mediante sus pendientes.

COMENZAMOS...

En el inicio de la unidad se tratan los siguientes conceptos:

- Definición de *función*
- Dominio y recorrido
- Tabla de valores

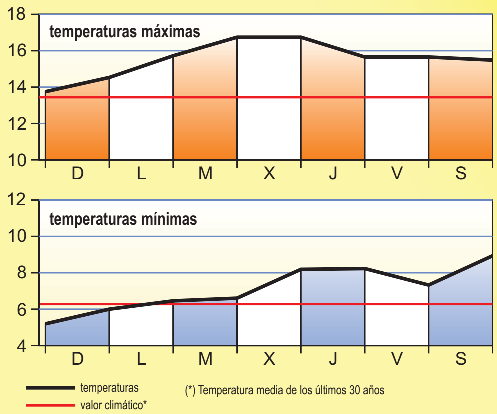
Una vez expuestos estos conceptos, se desarrollan los siguientes:

- Representación gráfica de una función
- Lectura de una gráfica
- Características de una función: intervalos de crecimiento, máximos y mínimos
- Funciones continuas y discontinuas
- Funciones lineales. Función constante
- Pendiente de la recta

La unidad termina con ejercicios y problemas para realizar en grupo.

LO QUE SABEMOS...

Con lo que tú ya sabes y la información que puedes recoger en tu entorno más próximo (por ejemplo, leyendo periódicos y revistas) podéis realizar un debate en clase:



La gráfica corresponde a las temperaturas máximas y mínimas de una semana.

- ¿Qué día se alcanza la temperatura máxima? ¿Y la mínima?
- ¿Cuál es la temperatura mínima?
- ¿Qué día será el mejor para ir de excursión al campo?
- Haz un estudio de la gráfica, viendo dónde aumenta la temperatura máxima, dónde aumentan las mínimas y cuándo se alcanzan las temperaturas máxima y mínima.

Al terminar esta unidad de trabajo SERÁS CAPAZ DE...

- Reconocer si una gráfica es una función o no.
- Distinguir las variables dependiente e independiente de una correspondencia.
- Construir la gráfica correspondiente a un texto dado.
- Interpretar una gráfica para estudiar diversas situaciones de la vida cotidiana.
- Convertir una función en lenguaje ordinario a expresión algebraica y viceversa.
- Determinar en qué intervalos una función es creciente y en cuáles es decreciente.
- Averiguar los máximos y los mínimos de la gráfica de una función.
- Determinar si la gráfica de una función es continua o discontinua.
- Representar funciones de la forma $y = mx + n$.
- Reconocer si una función es lineal o afín.
- Averiguar la pendiente de una recta.
- Saber si dos rectas son paralelas por medio de sus pendientes.

Recuerda

El **recorrido** también se denomina *rango*.

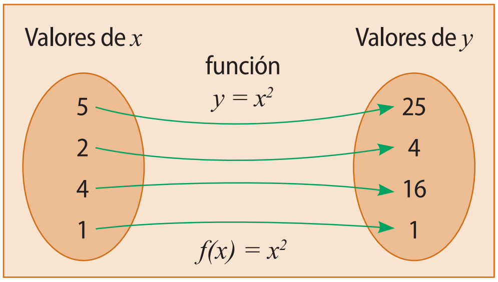
Recuerda

Magnitud: todo fenómeno que podemos medir.

Medidores de diversas magnitudes.

LAS FUNCIONES

Una **función** $y = f(x)$ es una relación entre dos magnitudes o variables, x e y, que asocia a cada valor de la variable x un único valor de la variable y.



A cada valor de x se asocia un valor de y.

$f(x) = x^2 = y$

$f(5) = 5^2 = 25$

$f(2) = 2^2 = 4$

$f(4) = 4^2 = 16$

$f(1) = 1^2 = 1$

- x es la variable independiente; y es la variable dependiente.
- A un valor de x le corresponde un único valor de y, llamado *imagen*.

  En el ejemplo anterior se tiene $f(2) = 4$. También se puede decir que la imagen de 2 es 4 o que para el valor $x = 2$ se tiene que $y = 4$.
- El conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x se denomina *dominio* de $f(x)$, es decir, son los valores de x para los cuales existe la función.

  El dominio del dibujo anterior es [1, 2, 4, 5] y se escribe:

  $$Df(x) = [1, 2, 4, 5]$$
- El conjunto de valores que toma la variable dependiente y se denomina *recorrido*, es decir, es el conjunto de imágenes.

  El recorrido del dibujo anterior es [1, 4, 16, 25].
- Disponiendo los valores relacionados en dos columnas se obtiene lo que denominamos *tabla de valores*.

  Se sustituye el valor de x en la función para obtener el valor de y.

x	$y = x^2$
1	1
2	4
4	16
5	25

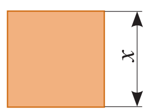
Hay funciones que se suelen expresar algebraicamente, con una fórmula matemática que nos permita calcular los valores de la variable dependiente (y) sabiendo los valores de la variable independiente (x).

Ejemplo: Calculamos el perímetro de un cuadrado a partir de la longitud del lado.

Lado del cuadrado = x (variable independiente)

Perímetro = $x + x + x + x$ (suma de los lados)

Función: $y = 4x$; es lo mismo que $f(x) = 4x$



Indica la operación que hay que realizar con la variable independiente x para obtener y.

Tabla de valores

x	$y = 4x$
1	4
2	8
3	12

⇨ $f(2) = 4 \cdot 2 = 8$

La imagen de 2 es 8. También se dice que para $x = 2$ se tiene $y = 8$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1º. Indica si las siguientes correspondencias son funciones:
a) Temperatura de una persona tomada cada 4 horas.
b) Relación de cada número entero con su triple.
c) Temperaturas máxima y mínima de los pacientes de un hospital.

Solución:
a) Sí, ya que cada cuatro horas tendrá una única temperatura.
b) Sí, ya que cada número entero tiene un único triple.
c) No, ya que un paciente puede tener dos valores distintos de temperaturas máxima y mínima.

2º. Busca en los siguientes ejemplos cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.
a) Gasto de gasolina y velocidad de un coche
b) Área de un cuadrado y longitud de sus lados
c) Número de páginas de un libro y su grosor

Solución:
a) Variable independiente: velocidad
Variable dependiente: gasto de gasolina
b) Variable independiente: longitud del lado
Variable dependiente: área del cuadrado
c) Variable independiente: número de páginas.
Variable dependiente: grosor del libro.

3º. Escribe la formula matemática que nos permita calcular el área de un cuadrado sabiendo la longitud de sus lados.

Solución:
Lado del cuadrado = x. Como el área de un cuadrado es lado al cuadrado: ⇨ $y = x^2$

4º. Dada la función $y = 2x + 3$, escribe una tabla de valores para calcular las imágenes de 1, –2 y 3.

Solución:

x	y
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$
–2	$2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$
3	$2 \cdot 3 + 3 = 6 + 3 = 9$

5º. Dada la siguiente tabla de valores:

Horas transcurridas	0	1	2	3	4	5	6
kilómetros recorridos	0	2	5	9	10	11	11

a) ¿Cuánto vale $f(5)$? ¿Y $f(6)$?
b) ¿Cuál es la imagen de 4?
c) Para $x = 3$, ¿qué vale y?

Solución:
a) $f(5) = 11, f(6) = 11$ b) Es $10, f(4) = 10$ c) $y = 9$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1º. Indica si las siguientes correspondencias son funciones:
a) Relación de cada persona de una empresa con su edad.
b) Temperaturas máxima y mínima de cada mes.
c) Correspondencia de cada número positivocon su raíz cuadrada.
d) Relación de cada número con su doble.
e) Asociación de cada persona con su nombre.

2º. Busca en los siguientes ejemplos cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.
a) Velocidad de un coche y metros recorridos.
b) Ganancias de un librero y libros vendidos.
c) Coste de una llamada telefónica y minutos que dura.

3º. Escribe la fórmula matemática que nos permita calcular:
a) El perímetro de un triángulo equilátero de lado x.
b) El triple de un número más la mitad de dicho número.

4º. Calcula las imágenes de $x = -2$ y $x = 3$ para las siguientes funciones:
a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = -2x + 4$ c) $y = x^3 + 2$

5º. Dada la función $y = 3x - 5$, escribe una tabla de valores para calcular las imágenes de 1, 2, –1, 3, 0, –4 y 5/3.

6º. Completa la tabla de valores para la función $y = 2x^2 - 3x$.

x	y
1	
–2	
–1	

7º. Dada la siguiente tabla de valores:

Años de una persona	1	2	3	4	5	6
Peso en kilogramos	7	10	13	14	18	20

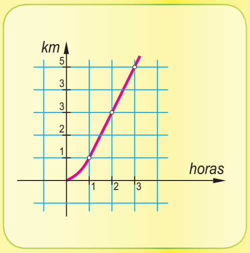
a) ¿Cuánto vale $f(3)$? ¿Y $f(6)$?
b) ¿Cuáles son la variable independiente y la variable dependiente?
c) ¿Cuál es la imagen de 4?
d) Para $x = 2$, ¿qué vale y?
e) Si $y = 18$, ¿qué vale x?

Recuerda

No siempre tiene sentido unir los puntos de una tabla de valores.

-

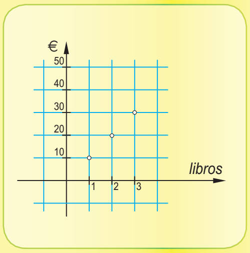
Horas	1	2	3
Km recorridos	1	3	5



Tiene sentido unir los puntos, ya que entre las horas hay minutos y segundos.

-

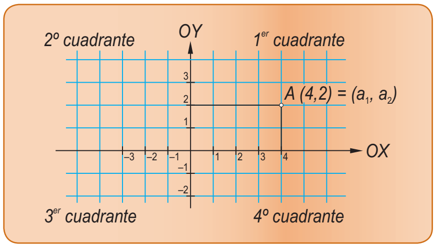
Libros vendidos	1	2	3
Recaudación (€)	10	20	30



No tiene sentido unir los puntos, ya que se venden libros enteros.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Para representar gráficamente una función se toman los ejes de coordenadas cartesianas, dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto *O* (0, 0), llamado *origen de coordenadas*.



- El eje horizontal es el eje *OX* (eje de abscisas), donde se mide la primera coordenada del punto (a_1).
- El eje vertical es el eje *OY* (eje de ordenadas), donde se mide la segunda coordenada del punto (a_2).

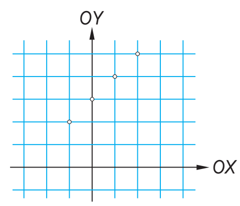
La **gráfica de una función** $y = f(x)$ es el conjunto de puntos $[a, f(a)]$, donde a se representa en el eje *OX* y $f(a)$ en el eje *OY*.

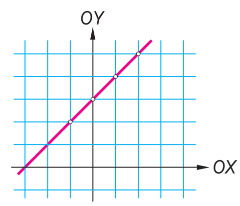
Para representar gráficamente una función con fórmula matemática, se suele realizar primero una tabla de valores y luego se dibujan en el plano los puntos correspondientes.

Ejemplo: Para representar gráficamente la función $y = x + 3$:

a) Tabla de valores b) Puntos c) Situamos los puntos d) Gráfica

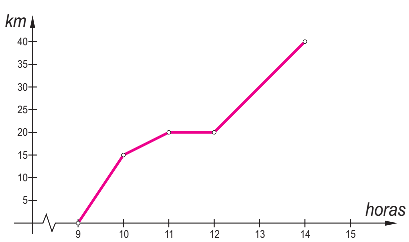
x	$y = x + 3$		
0	3	→	(0, 3)
1	4	→	(1, 4)
–1	2	→	(–1, 2)
2	5	→	(2, 5)





Lectura de una gráfica

En la siguiente gráfica, se representan en el eje *OX* las horas que transcurren en una excursión que empieza a las 9,00 horas y en el eje *OY* los kilómetros recorridos.



- La ruptura que hay en el eje *OX* es debida a que empezamos con el 9.
- No tomamos las mismas unidades en los ejes.
- En la primera hora, el excursionista recorrió 15 km, en la siguiente hora recorrió 5 km y luego se paró una hora para almorzar (de 11,00 a 12,00 horas).
- En las dos últimas horas recorrió 20 km.
- La excursión finalizó a las 14,00 horas, habiendo recorrido un total de 40 km.

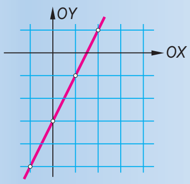
EJERCICIOS RESUELTOS

1º. Representa gráficamente la función $y = 2x - 3$ realizando una tabla de valores con los valores 1, 0, –1 y 2, y luego une los puntos de la gráfica.

Solución:

Tabla de valores — Puntos — Gráfica

x	y		Puntos
1	–1	→	(1, –1)
0	–3	→	(0, –3)
–1	–5	→	(–1, –5)
2	1	→	(2, 1)



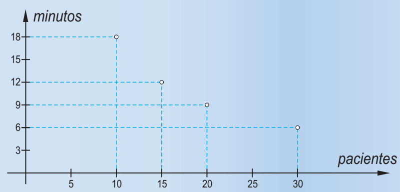
2º. Un médico dedica 3 horas a recibir pacientes. El tiempo que dedica a cada paciente depende del número de pacientes que recibe.

Si son 10 pacientes, dedica 18 minutos a cada uno. Si son 15 pacientes, dedica 12 minutos a cada uno. Si son 20 pacientes, dedica 9 minutos a cada uno. Y si son 30 pacientes, dedica 6 minutos a cada uno.

Representa en una gráfica el tiempo dedicado a cada paciente y el número de pacientes recibidos.

¿Se deben unir los puntos de la gráfica?

Solución:



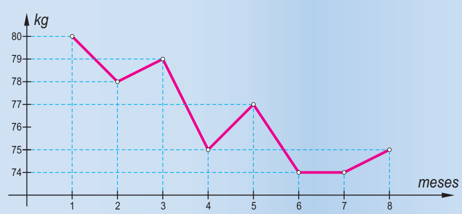
No se deben unir los puntos de la gráfica, porque el número de pacientes se expresa con números naturales (0, 1, 2...).

3º. En la siguiente tabla se estudia el peso de una persona en los ocho primeros meses de un año.

Meses	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso (kg)	80	78	79	75	77	74	74	75

Representa en una gráfica los meses transcurridos y el peso. ¿Se deben unir los puntos de la gráfica?

Solución:



Sí tiene sentido unir los puntos de la gráfica.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1º. Representa gráficamente la función $y = 5 - 3x$ realizando una tabla de valores con los valores 1, 0, –1 y 2, y luego une los puntos de la gráfica.

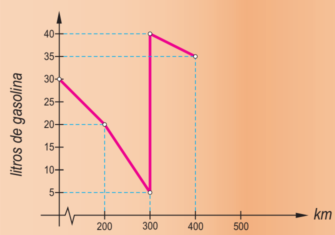
2º. Representa gráficamente la función $y = x^2 - 4$ realizando una tabla de valores con los valores 1, 0, –1, –2 y 2, y luego une los puntos de la gráfica.

3º. Representa gráficamente la estatura de una niña en función de la edad que tiene según la tabla de valores:

Meses	2	5	8	11	14	17
Peso (kg)	60	120	130	150	170	180

¿Se deben unir los puntos de la gráfica?

4º. La siguiente gráfica representa la gasolina que hay en el depósito de un coche (eje *OY*) y los kilómetros recorridos (eje *OX*).



Contesta razonadamente:

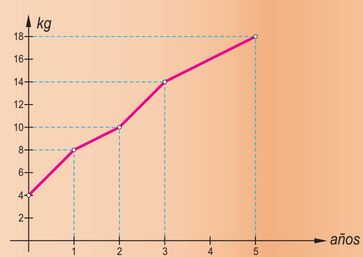
a) ¿Por qué hay una ruptura en el eje *OX*?

b) ¿Cuánta gasolina tenía el coche al inicio del recorrido? ¿Y al final? ¿Cómo es posible que tenga más gasolina al terminar el recorrido?

c) ¿En qué kilómetro ha repostado?

d) ¿En qué kilómetro ha gastado más gasolina?

5º. La gráfica siguiente representa el peso de un niño (eje *OY*) desde que su nacimiento hasta los 5 años (eje *OX*).



Contesta razonadamente:

a) ¿Cuánto pesó al nacer?

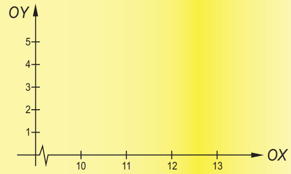
b) ¿Cuánto pesaba con un año? ¿Y con dos años?

c) ¿Cuántos kilos aumentó durante el segundo año de vida? ¿Y en el tercer año?

d) ¿A qué edad pesaba 8 kg? ¿Y 16 kg?

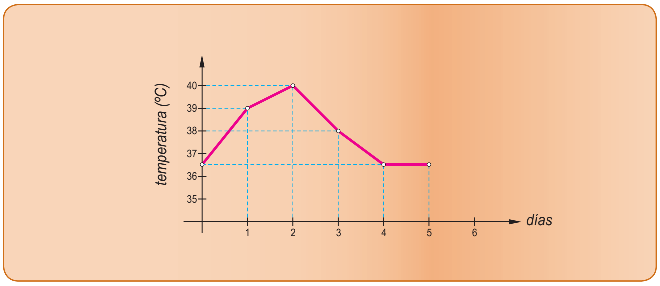
Recuerda

La ruptura de un eje indica que empezamos la graduación en un número distinto de 1.



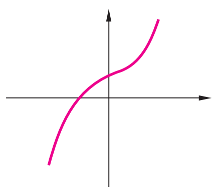
FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

La gráfica siguiente nos muestra la fiebre que ha tenido un niño durante los 5 días que ha estado enfermo.

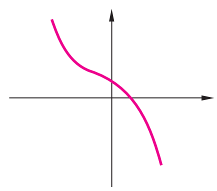


Observamos que el primer día la temperatura subió hasta llegar a 39º. El segundo día empeoró y la temperatura siguió subiendo hasta 40º. Al tercer día empezó a mejorar y la temperatura descendió a 38º. El cuarto día, la temperatura siguió bajando hasta llegar a 36,5º. Y el quinto día ya se recuperó y no le subió la fiebre: la temperatura se mantuvo durante todo el día en 36,5º.

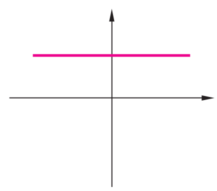
- La función es **creciente** en los días primero y segundo, es decir, la función es creciente en el intervalo (0, 2) (del eje *OX*).
- La función es **decreciente** en los días tercero y cuarto, es decir, la función es decreciente en el intervalo (2, 4).
- La temperatura se mantiene constante el quinto día; por lo tanto, la función es **constante** en el intervalo (4, 5).



Función creciente.



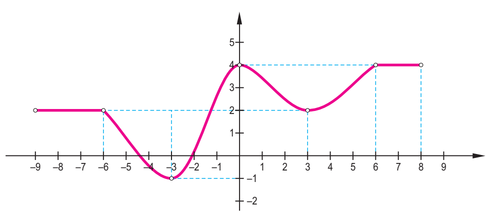
Función decreciente.



Función constante.

- Una función es **creciente** si, a medida que aumenta la variable independiente x, también aumenta la variable dependiente y.
- Una función es **decreciente** si, a medida que aumenta la variable independiente x, disminuye la variable dependiente y.
- Una función es **constante** si, a medida que aumenta la variable independiente x, se mantiene fija la variable dependiente y.

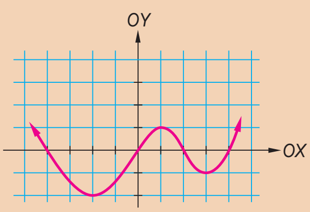
Observa la siguiente función:



- Creciente en (–3, 0) ∪ (3, 6)
- Constante en (–9, –6) ∪ (6, 8)
- Decreciente en (–6, –3) ∪ (0, 3)
- Dominio: [–9, 8]
- Recorrido: [–1, 4]

¿Sabías que...?

Estudiar la monotonía de una función significa decir para qué valores de x es creciente y para qué valores es decreciente.



La función es creciente en:

$(-2, 1) \cup (3, +\infty)$

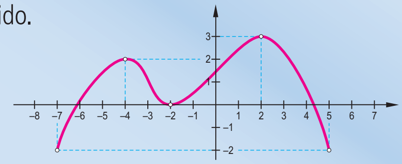
La función es decreciente en:

$(-\infty, -2) \cup (1, 3)$

$\cup \rightarrow$ símbolo de unión

EJERCICIOS RESUELTOS

1º. Dada la gráfica siguiente, indica en qué intervalos es creciente y en cuáles decreciente. Calcula el dominio y el recorrido.



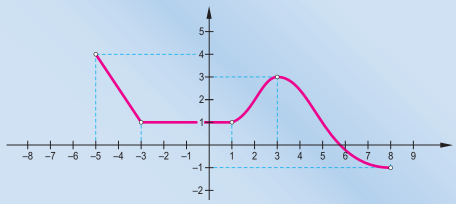
Solución:

Es creciente en (–7, –4) ∪ (–2, 2) y decreciente en (–4, –2) ∪ (2, 5].

El dominio son los valores de x que tienen imagen. Por lo tanto, es [–7, 5] (se mira el eje *OX* de izquierda a derecha).

El recorrido son los valores de y que son imágenes de algún valor de x. Por lo tanto, es [–2, 3] (se mira el eje *OY* de abajo arriba).

2º. Estudia la monotonía de la siguiente función.



Solución:

Es creciente en (1, 3), decreciente en (–5, –3) ∪ (3, 8) y constante en (–3, 1).

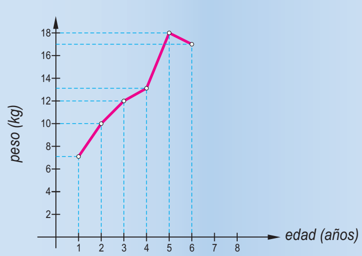
El dominio es [–5, 8] y el recorrido es [–1, 4].

3º. Dada la siguiente tabla de valores:

Edad	1	2	3	4	5	6
Peso (kg)	7	10	12	13	18	17

Representa y explica los intervalos de crecimiento.

Solución:

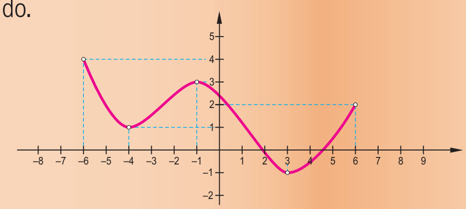


El peso aumenta desde que tiene 1 año hasta los 5 años. Por lo tanto, la función es creciente en el intervalo (1, 5).

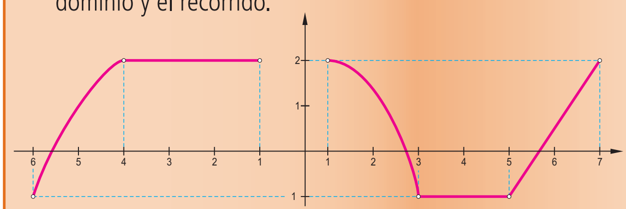
El peso disminuye de los 5 a los 6 años. Por lo tanto, es decreciente en el intervalo (5,6).

EJERCICIOS PROPUESTOS

1º. Dada la gráfica siguiente, indica en qué intervalos es creciente y en cuáles decreciente. Calcula el dominio y el recorrido.



2º. Estudia la monotonía de la siguiente función. Calcula el dominio y el recorrido.

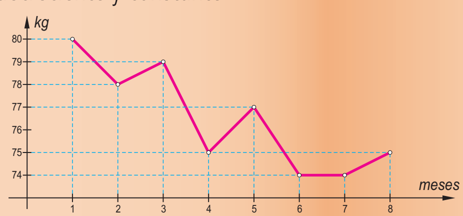


3º. En la siguiente tabla se estudia el peso de una persona en los ocho primeros meses de un año.

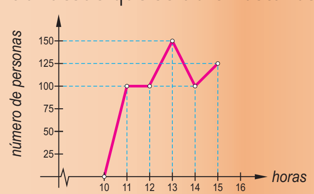
Meses	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso (kg)	3	3	4	4,5	4	6	7	7

Representa en una gráfica los meses transcurridos y el peso. Estudia la monotonía de la función.

4º. Indica los intervalos donde la gráfica siguiente es creciente, decreciente y constante.



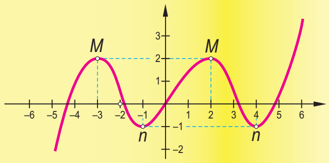
5º. La siguiente gráfica relaciona el número de personas en un centro comercial desde que se abre hasta las 15,00 h.



Indica los intervalos de crecimiento.

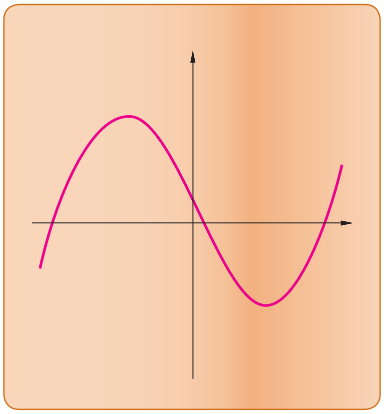
Recuerda

Una función puede tener más de un máximo o mínimo.



Máximos: puntos (–3, 2) y (2, 2)

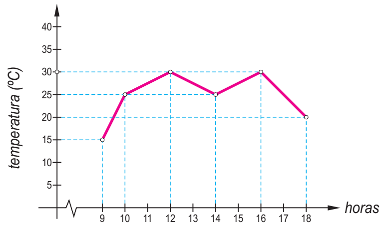
Mínimos: puntos (–1, 1) y (4, –1)



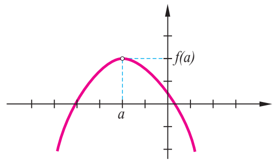
Función continua.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

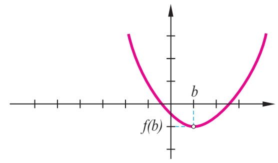
La gráfica siguiente nos muestra la temperatura de una habitación durante un día.



La temperatura va aumentando desde las 9,00 h hasta las 12,00 h y luego disminuye, por lo tanto el punto (12, 30) es un **máximo**; también lo es el punto (16, 30). La función decrece desde las 12,00 h hasta las 14,00 h y luego empieza a crecer: el punto (14, 25) es un **mínimo**.



Máximo en *(a, f(a))*.



Mínimo en *(b, f(b))*.

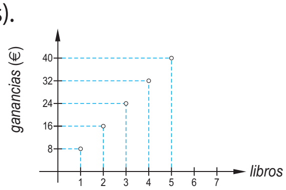
- El **máximo** de una función es un punto $(a, f(a))$ donde la función pasa de ser creciente a decreciente; alrededor de dicho punto los valores de y están por debajo de $f(a)$.
- El **mínimo** de una función es un punto $(b, f(b))$ donde la función pasa de ser decreciente a creciente; alrededor de dicho punto los valores de y están por encima de $f(b)$.

FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUAS

Una función es **continua** si la gráfica se puede dibujar de un solo trazo, sin levantar el bolígrafo del papel; en caso contrario se dice que es **discontinua**.

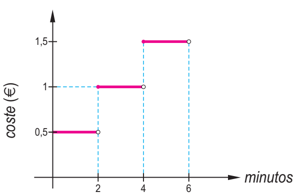
Observemos los siguientes ejemplos:

- En el eje *OX* se representan los libros vendidos y en el eje *OY* las ganancias obtenidas (en euros).



No es continua, ya que no tiene sentido unir los puntos.

- Se representa el coste de una llamada telefónica dependiendo de los minutos que dure.

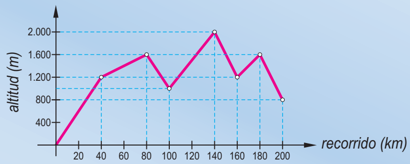


No es continua; en los valores pares de x hay un salto.

La gráfica no se puede realizar de un solo trazo.

EJERCICIOS RESUELTOS

1º. El siguiente perfil corresponde a una etapa de una vuelta ciclista:



Responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿En qué tramos el recorrido es ascendente? ¿Y descendente?

b) ¿Dónde se alcanza la máxima altura?

c) ¿Qué altura se corresponde con los 80 km de recorrido? ¿Qué kilómetro se corresponde con los 1.000 m de altitud?

Solución:

a) El recorrido es ascendente desde el kilómetro 0 hasta el 80, del 100 al 140 y del 160 al 180.

b) Es descendente del kilómetro 80 al 100, del 140 al 160 y del 180 al 200.

c) La altura máxima es 2.000 m y se alcanza en el kilómetro 140. Por lo tanto, el punto es (140, 2.000).
A los 80 km hay una altura de 1.600 m. Los 1.000 m de altura se corresponden con el kilómetro 100.

2º. Un vendedor de libros cobra por un día de trabajo 60 € y una comisión de 4 € por cada libro vendido, y tiene como máximo un sueldo diario de 100 €.

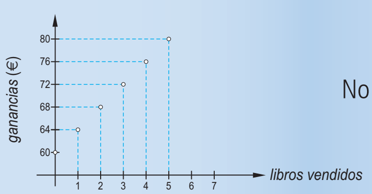
a) ¿Cuánto cobrará un día que vende 5 libros? ¿Y si vende 10 libros?

b) Escribe la fórmula matemática de la función que relaciona el número de libros vendidos con el sueldo. Represéntala gráficamente. ¿Es una función continua?

Solución:

a) Si vende 5 libros tiene una comisión de $5 \cdot 4 = 20$ €.
Gana 60 € fijos, más la comisión: $60 + 20 = 80$ €.
Si vende 10 libros: $60 + 10 \cdot 4 = 60 + 40 = 100$ €.

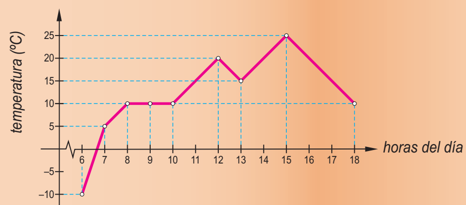
b) x = nº de libros vendidos, y = sueldo
⇨ $y = 60 + 4x$



No es continua.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1º. La siguiente gráfica corresponde a la temperatura registrada en la calle por un termómetro desde las seis de la mañana hasta las seis de la tarde.



Responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿En qué horas del día la temperatura es constante?

b) ¿En qué horas la temperatura es ascendente? ¿Y descendente?

c) ¿A qué hora se alcanza la máxima temperatura? ¿Y la mínima?

d) ¿Qué temperatura hay a las dos de la tarde?

e) ¿Qué hora se corresponde con 5º de temperatura?

2º. Pedro lleva un carrete de 24 fotos a revelar. Le cobran 6 € por el revelado y 30 céntimos por cada foto que sale bien.

a) ¿Cuánto pagará Pedro si sólo salen bien 10 fotos? ¿Y si salen bien 15 fotos? ¿Y si sale todo el carrete?

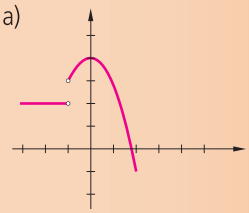
b) Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona el número de fotos que salen bien con el precio total que pagará Pedro.

c) Representa gráficamente la función y estudia la monotonía.

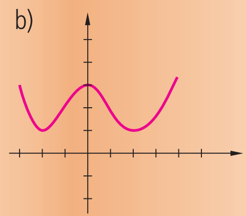
d) ¿Es una función continua?

3º. Escribe los puntos máximos y mínimos de las siguientes gráficas. ¿Son continuas?

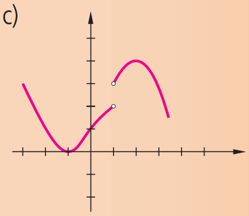
a)



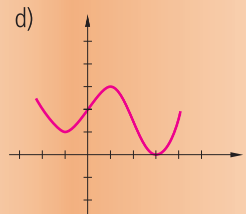
b)



c)

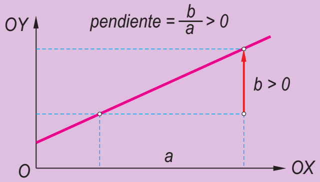


d)

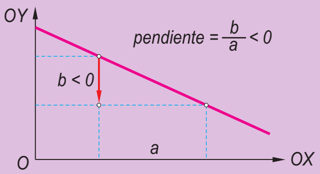


Analiza

Si la pendiente de una recta es positiva, la función es creciente.



Si la pendiente es negativa, la función es decreciente.



Recuerda

La **función lineal** también se llama *función de proporcionalidad directa.*

¿Sabías que...?

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

¿Sabías que...?

Un punto (a, b) es de la recta $y = mx + n$ si verifica su ecuación, es decir, se cumple:

$$b = m \cdot a + n$$

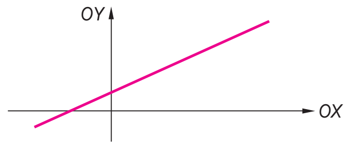
Ejemplo

El punto (3, 5) pertenece a la recta de ecuación $y = x + 2$, ya que para $x = 3$ tenemos que $y = 5$.

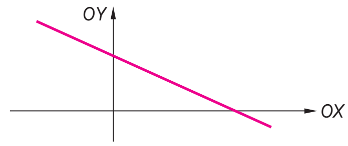
FUNCIONES LINEALES Y AFINES

Una función polinómica de primer grado es de la forma $y = mx + n$ y su representación gráfica es una **recta** con pendiente m.

- La **pendiente** es el número m y nos indica la inclinación de la recta.
- El número n es la **ordenada en el origen**, es decir, la recta pasa por el punto $(0, n)$.

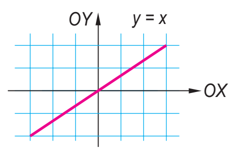


m positiva ($m > 0$)
(inclinada hacia la derecha)

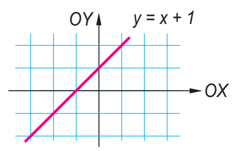


m negativa ($m < 0$)
(inclinada hacia la izquierda)

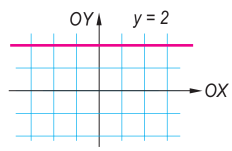
- Si $n = 0 \Rightarrow y = mx$, se trata de una **función lineal**. Esta recta pasa por el origen de coordenadas O (0, 0).
- Si $n \neq 0 \Rightarrow y = mx + n$, se trata de una **función afín**. Esta recta pasa por el punto $(0, n)$.
- Si $m = 0$: la función $y = n$ es **constante**: su representación gráfica es una recta horizontal a la altura que indica n.



Función lineal.



Función afín.



Función constante.

Ejemplo: Estudia y representa gráficamente la recta de ecuación $y = 2x - 4$.

Pasos a seguir:

a) La pendiente de la recta es $m = 2 > 0 \Rightarrow$ recta inclinada hacia la derecha.

b) Función afín: $(n = -4)$.

c) Puntos de corte con los ejes:

- Eje OX: $y = 0 \Rightarrow 0 = 2x - 4$. Se resuelve la ecuación: $2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$
  Pasa por el punto **(2, 0)**
- Eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \cdot x - 4 \Rightarrow y = -4$. Pasa por el punto **(0, –4)**

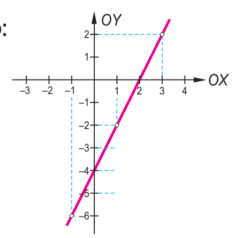
ordenada en el origen

d) Tabla de valores:

x	y		
1	$2 - 4 = -2$	$\rightarrow$	(1, –2)
–1	$-2 - 4 = -6$	$\rightarrow$	(–1, –6)
–3	$6 - 4 = 2$	$\rightarrow$	(3, 2)

puntos a representar

e) Representamos gráficamente la recta en el plano:



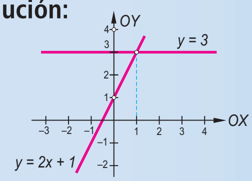
No es necesario realizar todos los pasos en la representación gráfica.

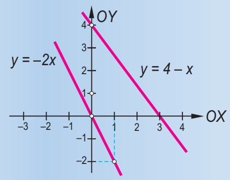
EJERCICIOS RESUELTOS

1º. Representa las siguientes rectas e indica si son crecientes, decrecientes o constantes. ¿Son funciones lineales o afines?

a) $y = 2x + 1$ b) $y = 3$ c) $y = 4 - x$ d) $y = -2x$

Solución:





a) Creciente $(m = 2 > 0)$. Función afín.
b) Función constante $(m = 0)$.
c) Decreciente $(m = -1 < 0)$. Función afín.
d) Decreciente $(m = -2 < 0)$. Función lineal.

2º. Dada la recta $y = -2x + 3$:

a) Halla su pendiente y su ordenada en el origen.
b) Halla los valores de a y b para que los puntos $P(a, 1)$ y $Q(-3, b)$ sean de la recta.
c) Calcula los puntos de corte con los ejes.
d) Indica si es una función lineal o afín.
e) Representa gráficamente la recta.

Solución:

a) Pendiente: $m = -2$. Ordenada en el origen: $n = 3$.

b) El punto $P(a, 1)$ es de la recta si, al sustituir la x por a y la y por 1, se verifica la igualdad.

$1 = -2a + 3 \Rightarrow 2a = 3 - 1 \Rightarrow a = 2/2 = 1$

Lo mismo para el punto Q; sustituimos la x por –3 y la y por b: $b = -2 \cdot (-3) + 3 \Rightarrow b = 6 + 3 = 9$.

c) Punto de corte con el eje OX: $y = 0$

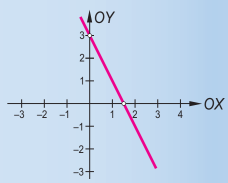
$0 = -2x + 3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. Punto $(\frac{3}{2}, 0)$.

Punto de corte con el eje OY: $x = 0$

$y = 0 + 3 = 3$. Punto (0, 3).

d) Función afín ($m \neq 0$).

e)



3º. Calcula la ecuación de la recta que tiene pendiente –2 y pasa por el punto (1, 2).

Solución:

Como la pendiente es –2, entonces: $y = -2x + n$.
Pasa por el punto (1, 2) $\Rightarrow 2 = -2 \cdot 1 + n \Rightarrow 4 = n$. Entonces la ecuación de la recta es $y = -2x + 4$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1º. Representa las siguientes rectas e indica si son crecientes, decrecientes o constantes. ¿Son funciones lineales o afines?

a) $y = 1 - 2x$ b) $y = 3x$ c) $y = -x$ d) $y = 3x + 6$

2º. Dada la recta $y = 3 - x$:

a) Halla su pendiente y su ordenada en el origen.
b) Calcula los puntos de corte con los ejes.
c) Indica si es una función lineal o afín.
d) Representa gráficamente la recta.

3º. Representa gráficamente $y = 3 - 3x$, calculando los puntos de corte con los ejes y realizando una tabla de valores para los valores de x: 1, –1, 2 y –2.

4º. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto (–2, 4) y tiene pendiente –3.

5º. Calcula la ecuación de la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto (–1, 2).

6º. Indica cuáles de las rectas siguientes son paralelas:

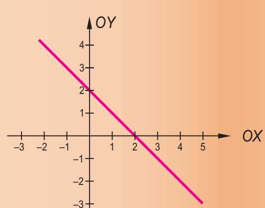
a) $y = -3x$ b) $y = -3 + x$ c) $y = x - 2$ d) $y = 2 - 3x$

7º. Para la recta $y = -2x + 1$, calcula la imagen para $x = -1$ y la antiimagen para $y = 2$. Representa la recta.

8º. Representa gráficamente las rectas siguientes e indica si son crecientes o decrecientes.

a) $y = 2x$ b) $y = -3 + 1$ c) $y = 3x - 4$ d) $y = 2 - x$

9º. Dada la recta representada en el dibujo:



a) Halla su pendiente y su ordenada en el origen.
b) Halla su ecuación.
c) Si la abscisa de un punto A de la recta es –1, ¿cuál es su ordenada?

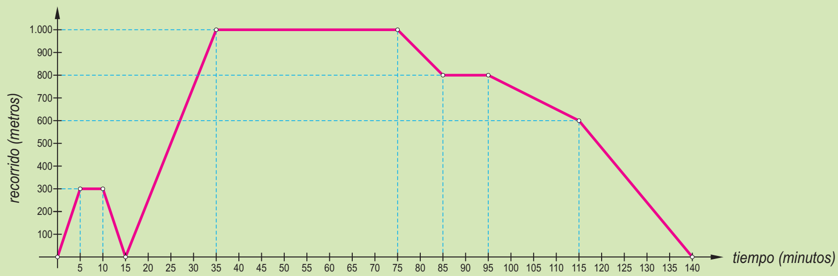
10º. Calcula la ecuación de las rectas siguientes:

a) Con pendiente 4 y ordenada en el origen 2.
b) Con pendiente –1/3 y que pase por el punto (1, 4).

11º. Representa gráficamente $y = 6 + 3x$, calculando los puntos de corte con los ejes y realizando una tabla de valores para los valores de x: 1, –1, 2 y –2.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PARA REFORZAR

1. Paseo en bicicleta: una chica sale de su casa y se dirige a casa de su amigo Óscar para entregarle unos apuntes. Cuando llega a casa de Óscar, se da cuenta de que se le ha olvidado algo y regresa a su casa acompañada por Óscar. Luego se dirigen al campo, donde paran a comer unos bocadillos; de regreso a casa, la bicicleta de Óscar se rompe y tienen que ir andando hasta la gasolinera más próxima, donde le arreglan la bicicleta y así llegan los dos a casa de Óscar.



a) ¿Cuántos metros recorre la chica?

b) ¿A qué distancia está la casa de la chica de la de Óscar?

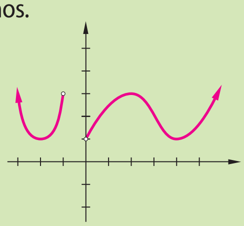
c) ¿Cuánto tardan en comer?

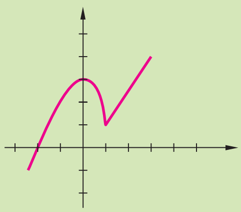
d) ¿A qué distancia estaba la gasolinera más próxima cuando se rompió la bicicleta?

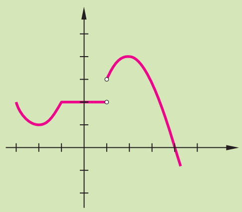
e) ¿Cuánto tiempo tardaron en arreglarle la bicicleta?

2. Representa gráficamente la función $y = x^2 - 4$ realizando una tabla de valores con los valores 1, 0, –1, –2 y 2, y luego une los puntos de la gráfica.

3. Dadas la gráficas siguientes, indica en qué valores del eje *OX* son crecientes, decrecientes y constantes. Calcula los máximos y los mínimos.







4. En la gráfica siguiente se muestra el crecimiento de Ana y Pedro con el paso del tiempo:

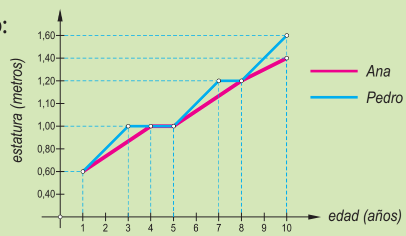
a) ¿Cuánto medía Ana a los 4 años?

b) ¿A qué edad Ana medía 120 cm?

c) Entre los 5 y 10 años, ¿quién creció más?

d) ¿Cuánto medía Pedro a los 2 años?

e) ¿A qué edad Pedro medía 140 cm?



5. Realiza una tabla de cinco valores, calcula los puntos de corte con los ejes y representa gráficamente:

a) $y = -2x + 3$ b) $y = -6 + 3x$ c) $y = 3x$ d) $y = -x - 2$ e) $y = \frac{1}{2}x + 3$

6. Indica si los siguientes pares de rectas son paralelas o secantes, sin realizar la representación gráfica:

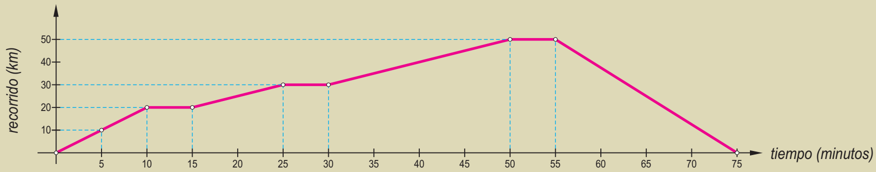
a) $\begin{cases} y = x \\ y = 2 + x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -x \\ y = x - 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$

7. Sabemos que una recta pasa por el punto *A* (0, 4) y su pendiente es 2. Calcula su ecuación y represéntala.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PARA AMPLIAR

1. Un librero vende cada libro a 6 €. Escribe la fórmula matemática que calcula las ganancias del librero según los libros vendidos y representa gráficamente la función.

2. En la siguiente gráfica aparece representado el movimiento de un tren.



El tren sale de la estación y va ganando velocidad poco a poco. En su recorrido para en varias estaciones para recoger viajeros. Después de hacer su trayecto, el tren regresa a las cocheras sin hacer ninguna parada.

a) ¿En cuántas estaciones se detiene para recoger o dejar viajeros?
b) ¿Cuánto tarda de una estación a otra?
c) ¿Qué distancia hay entre la primera y la última estación?
d) Indica los intervalos de crecimiento.
e) ¿Cuánto tarda en llegar a las cocheras, después de dejar a los pasajeros en la última estación?

3. Representa gráficamente la función $y = -4x + 3$ realizando una tabla de valores con los valores 1, 0, –1, –2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ y 2; luego une los puntos de la gráfica.

4. Representa gráficamente la función $y = 9 - x^2$ realizando una tabla de valores para $x = 3$, $x = 0$, $x = -3$, $x = -2$ y $x = 2$; luego une los puntos de la gráfica.

Indica en qué intervalos es creciente y en cuáles decreciente. Calcula los máximos y los mínimos.

5. Representa gráficamente, calculando los puntos de corte con los ejes:

a) $y = 2 - 8x$ b) $y = -4x - 3$ c) $y = -3x$ d) $y = -4x + 8$ e) $y = 1 - x$ f) $y = -9 + 3x$

6. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto *A* (–2, –1) y tiene pendiente –2. Representa dicha recta.

7. Completa la siguiente tabla y representa cada recta en los ejes coordenados.

Ecuación	Tipo: lineal o afín	Pendiente	Ordenada en el origen	Creciente o decreciente
$y = -x$		$m =$		
$y = 3 - x$		$m =$		
$y = 2x - 4$		$m =$		

VOCABULARIO

- Función
- Magnitud
- Dominio
- Recorrido
- Tabla de valores
- Abscisa
- Ordenada
- Coordenadas
- Origen de coordenadas
- Monotonía de una función
- Función creciente
- Función decreciente
- Función constante
- Máximo
- Mínimo
- Función continua
- Función discontinua
- Función lineal
- Función afín
- Pendiente de la recta
- Ordenada en el origen

REPASAMOS

MAPA CONCEPTUAL

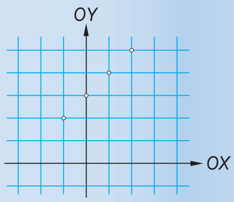
Función: relación entre dos variables, x e y, donde a cada valor de la variable independiente x le corresponde un único valor de la variable independiente y

Dominio y recorrido. Representación gráfica

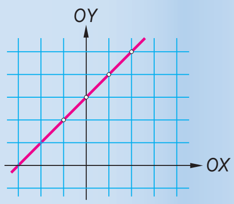
Tabla de valores

x	$y = x + 3$		puntos
0	3	$\rightarrow$	(0, 3)
1	4	$\rightarrow$	(1, 4)
–1	2	$\rightarrow$	(–1, 2)
2	5	$\rightarrow$	(2, 5)

Representar los puntos en el plano

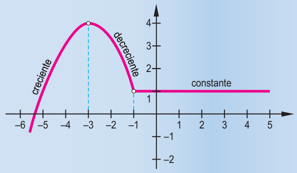


Unir los puntos



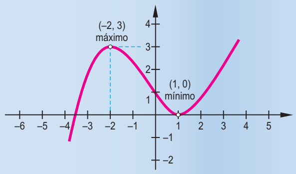
Características de una función

Monotonía: valores de x donde la función es creciente o decreciente

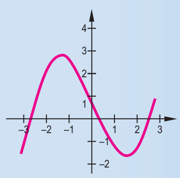


Creciente en (–∞, –3)
Decreciente en (–3, –1)
Constante en (–1, 5)

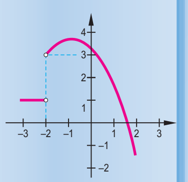
Máximos y mínimos



Continua

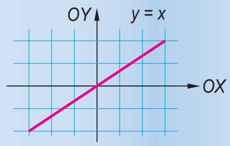


Discontinua

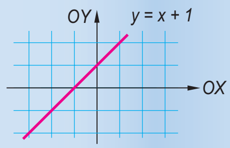


Función polinómica de primer grado: **recta** $y = mx + n$

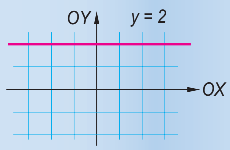
Función lineal: $y = mx$. Pasa por el punto (0,0).



Función afín: $y = mx + n$. No pasa por el punto (0,0).



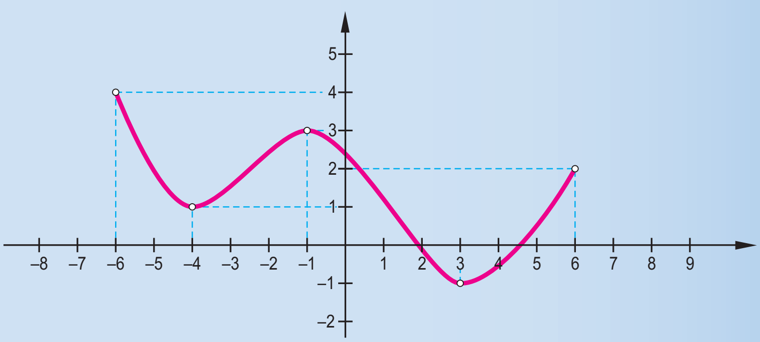
Función constante: recta horizontal, paralela al eje *OX*.



La **ordenada en el origen** es n.

La **pendiente** de una recta es el valor de m.

- Si m positiva $\rightarrow$ creciente
- Si m negativa $\rightarrow$ decreciente



Dominio: [–6, 6]
Recorrido: [–1, 4]
Creciente en (–4, –1) ∪ (3, 6)
Decreciente en (–6, –4) ∪ (–1, 3)
Máximo: punto (–1, 3)
Mínimos: puntos (–4, 1) y (3, –1)
Función continua en todo su dominio

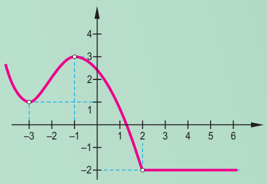
AUTOEVALUACIÓN

DE CONCEPTOS

1. El coste de una llamada en una cabina telefónica es de 50 céntimos al comenzar y de 5 céntimos cada minuto. ¿Cuál es el gráfico que relaciona el coste de la llamada con la duración?

2. Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:
- a) Dominio: [–3, 5]
- b) Recorrido: [–1, 4]
- c) Creciente en los intervalos (–3, –1) y (3, 5)
- d) Decreciente en el intervalo (–1, 3)
- e) Mínimo en el punto (3, –1)
- f) Máximo en el punto (5, 4)
- g) Continua en todo su dominio

3. Dada la grafica siguiente:



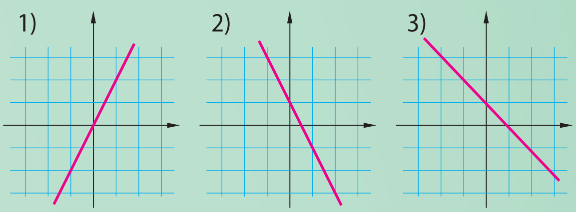
- a) Calcula los intervalos donde es creciente, decreciente y constante.
- b) Indica los puntos máximos y los mínimos.

4. Calcula la ecuación y representa las rectas:
- a) Pasa por el punto (–3, 1) y tiene pendiente –2.
- b) Tiene pendiente –1 y ordenada en el origen 3.
- c) Pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente –3.

5. Asocia cada expresión algebraica con la recta correspondiente:

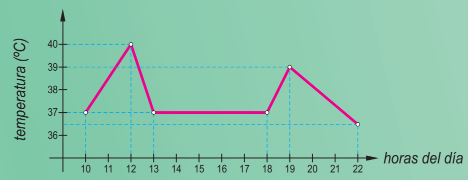
a) $y = -2x + 1$ b) $y = 2x$ c) $y = -x + 1$

1) 2) 3)



6. Dada la recta $y = -2x + 3$:
- a) Halla su pendiente y su ordenada en el origen.
- b) Calcula los puntos de corte con los ejes.
- c) Represéntala gráficamente
- d) Halla el valor que falta (*) en los siguientes puntos de la recta: P (*, 1) y Q (–3/2, *).

7. La siguiente gráfica muestra la variación de temperatura de un enfermo:



- a) ¿A qué horas del día le dieron medicina para que le bajase rápidamente la fiebre?
- b) Indica en qué períodos del día le subió la fiebre y en qué períodos le bajó.
- c) ¿Cuál fue su máxima temperatura? ¿A qué hora? ¿Cuál fue su mínima temperatura?¿A qué hora?

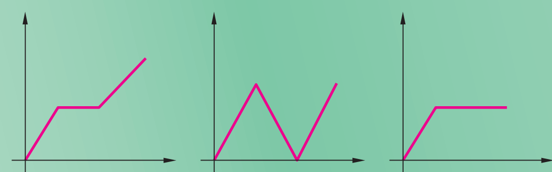
DE COMPETENCIAS

1. Tres personas nos cuentan lo que han hecho durante el día:

Pedro: "Me levanté por la mañana y me fui al instituto dando un paseo. Me encontré con un amigo y estuve hablando con él."

Miguel: "Salí de mi casa para ir al instituto; en el instituto me di cuenta de que se me había olvidado un trabajo y tuve que volver a casa. Luego fui otra vez al instituto."

Oscar: "Me fui al instituto y por el camino me encontré a un amigo, estuvimos hablando un rato y continué el camino hasta el instituto."



¿Qué gráfica corresponde a cada texto?